

基于小波变换的图象编码中的 噪声分析和优化比特分配*

李涛

俞斯乐

(中国航天工业总公司 8357 研究所,天津 300141) (天津大学电视与图象信息研究所,天津 300072)

摘要 研究了基于小波变换的图象编码。在系统地分析了小波变换各子图象的量化噪声和恢复噪声的基础上,提出了在给定的比特率下,使系统恢复失真达到最小的优化比特分配方案。指出了在均匀量化时各子图象量化步长之间具有成倍的关系。模拟实验证明了该结论,并给出了满意的结果。

关键词 小波变换,噪声分析,优化比特分配

1 引言

在图象编码领域,小波变换所提供的信号在时域、频域局部化多分辨率下表示的性质,对于图象编码非常适合。首先,现实世界的图象是非稳态的,小波变换将非稳态的信号分解成一系列相对平稳的子图象,有利于进行编码。其次,编码方案和参数可以依据每层子图象的特性进行调整,因此编码每一稳态子图象要比编码整个非稳态图象来得容易。另外,小波分解与人眼的生理、心理学研究结果相吻合。

小波理论和多分辨率分析与子带编码有密切关系。在多分辨率分析中,一幅图象被视为连续逼近的极限,其中在每一给定分辨率的一个逼近是图象在该分辨率的低频成份,一幅图象在不同分辨率的所有逼近形成了一个塔形结构。一个典型的例子是 Gaussian 塔。在 Gaussian 塔中,利用 Gaussisn 函数作为每一层的低频滤波器,但是,各子图象之间存在着冗余。Laplacian 塔可以消除这种冗余^[1],它用 Gaussisn 塔相邻层之间的差值作为每层的子图象,有利于进行压缩。在子带编码中,利用一组带通滤波器将塔形信号分解为一系列子带,然后分别进行编码。由于子带编码可以消除“块效应”,它的主观质量

要比变换编码好。

多分辨率表示和子带编码在小波理论中得到了有机结合,小波理论^[2]提供了构造具有正则和紧支条件的滤波器组的系统方法。在小波表示中,由于在不同尺度时小波基具有正交性,图象经过分解后像素数并没有改变,因此小波理论在图象编码中的应用类似于子带编码。

为了构造一个有效的基于小波变换的图象编码系统,量化策略非常重要。Westerink^[3]分析了子带编码中的量化噪声,但他只给出了在频域中第一层子带分解的量化噪声分析,没能建立对恢复噪声的表达式。Cheng^[4]给出了利用双正交小波变换实现图象编码时的量化噪声分析,但他也是只给出了一个近似公式。因此,本文致力于在系统地、完整地分析量化噪声和恢复噪声的基础上,导出基于小波变换的图象编码中各层子图象的比特分配方案。

2 小波理论简介

小波分解是一个给定信号在不同分辨率的信号空间中的连续投影。设 V_j 是分辨率为 2^{-j} 的信号空间, P_j 是信号 $f(x)$ 在分辨率为 2^{-j} 空间的投影,其中 j 是非负整数。在满足一定的条件下,存在一个尺

* 本课题获国家自然科学基金资助

收稿日期:1996-06-10;收到修改稿日期:1996-12-15

度函数 $\phi(x)$, 则 $\{\sqrt{2^j}\phi_{j,n}(x)\}$ 是 V_j 的正交基。其中

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-j}\phi(2^{-j}x - n) \quad (1)$$

P_j 可以表示为

$$P_j f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f(u), \sqrt{2^j}\phi_{j,n}(u)) \sqrt{2^j}\phi_{j,n}(x) \quad (2)$$

$(f(u), g(u))$ 表示内积。那么离散信号

$$P_j^d f(n) = (f(u), \phi_{j,n}(u)) \quad (3)$$

称为 $f(x)$ 在分辨率 2^{-j} 的离散逼近。

由于 $V_j \subset V_{j-1}$, 设 O_j 是 V_{j-1} 中 V_j 的正交补, 即

$$V_{j-1} = V_j \oplus O_j \quad (4)$$

在满足一定的条件下, 存在一个函数 $\Psi(x)$, 称为小波函数, 则 $\{\sqrt{2^j}\Psi_{j,n}(x)\}$ 构成 O_j 的正交基。

其中
$$\Psi_{j,n}(x) = 2^{-j}\Psi(2^{-j}x - n) \quad (5)$$

于是, 信号 $f(x)$ 在 O_j 的投影 D_j 为

$$D_j f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f(u), \sqrt{2^{-j}}\Psi_{j,n}(u)) \sqrt{2^j}\Psi_{j,n}(x) \quad (6)$$

而离散信号

$$D_j^d f(x) = (f(u), \Psi_{j,n}(u)) \quad (7)$$

称为 $f(x)$ 在分辨率 2^{-j} 的离散细节信号。由于 $\{\sqrt{2^j}\phi_{j,n}(x)\}$ 和 $\{\sqrt{2^j}\Psi_{j,n}(x)\}$ 的正交性, $P_j^d f$ 和 $D_j^d f$ 可直接由 $P_{j-1}^d f$ 中导出。

$$P_j^d f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k - 2n) P_{j-1}^d f(k) \quad (8)$$

$$D_j^d f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k - 2n) D_{j-1}^d f(k) \quad (9)$$

其中

$$h(n) = (\phi_{1,0}(u), \phi(u - n)) \quad (10)$$

$$g(n) = (\Psi_{1,0}(u), \phi(u - n)) \quad (11)$$

从式(8)和式(9)可以看到, $P_{j-1}^d f$ 经过离散线性滤波 \tilde{H} 和 \tilde{G} 再亚取样得到 $P_j^d f$ 和 $D_j^d f$, 如图 1 所示。上述的分解过程可以不断重复直至分辨率 2^{-j} , 因此信号 $f(x) \in V_0$ 可以连续分解。

$$V_0 = O_1 \oplus O_2 \cdots \oplus O_j \oplus V_j \quad (12)$$

其中 J 为小波变换的层数

相反, 由于 $V_{j-1} = V_j \oplus O_j$, $P_{j-1}^d f$ 也可以由 $P_j^d f$ 和 $D_j^d f$ 恢复, 如图 1 所示。

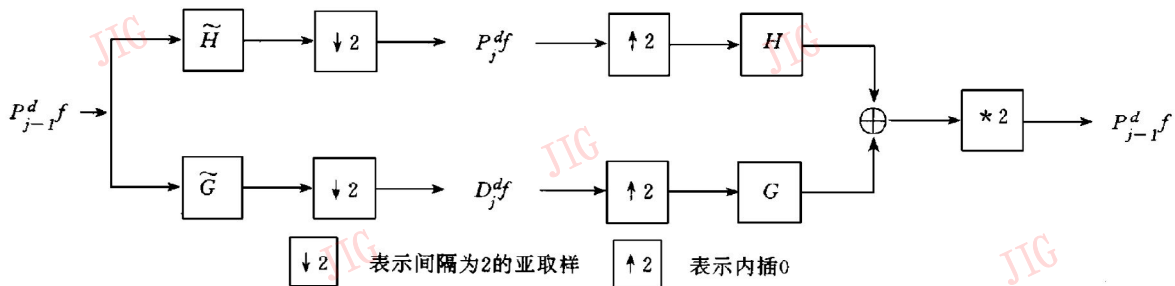


图 1 一维小波分解与恢复

Fig. 1 One-dimension wavelet decomposition and reconstruction

$$P_{j-1}^d f(n) = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) P_j^d f(k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) D_j^d f(k) \quad (13)$$

$\phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 的存在条件可以用 $h(n)$ 和 $g(n)$ 的傅立叶变换 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 来描述, 简单地讲, $\{\sqrt{2^j}\phi_{j,n}(x)\}$ 和 $\{\sqrt{2^j}\Psi_{j,n}(x)\}$ 的正交及互正交的条件为:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (14)$$

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (15)$$

$$H(\omega)G(\omega) + H(\omega + \pi)G(\omega + \pi) = 0 \quad (16)$$

若假设
$$G(\omega) = e^{-i\omega}\overline{H(\omega + \pi)} \quad (17)$$

或
$$g(n) = (-1)^n h(1 - n) \quad (18)$$

则式(14), (15)和(16)可表示为

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = 1 \quad (19)$$

$$H(\omega)H(\omega + \pi) + G(\omega)G(\omega + \pi) = 0 \quad (20)$$

并且滤波器 $h(n)$ 和 $g(n)$ 具有以下性质

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k)h(n - 2l) = \frac{1}{2}\delta_{kl} \quad (21)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k)g(n - 2l) = \frac{1}{2}\delta_{kl} \quad (22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k)g(n - 2k) = 0 \quad (23)$$

而式(19), (20)等价于

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(m-2k)h(n-2k) + g(m-2k)g(n-2k) = \frac{1}{2}\delta_{m,n} \quad (24)$$

图 2 表示二维情况下的小波变换,根据 Daubechies^[2]算法可以用 FIR 滤波器实现 H 和 G 。利用小波变换,图象 P_{j-1} 分解为相互正交的子图象 P_j, D_j^1, D_j^2 和 D_j^3, P_j 对应 P_{j-1} 的低频部分,而 D_j^1, D_j^2 和 D_j^3 对应于 P_{j-1} 和 P_j 之间的差值信号,在频率域,它们表示相互独立且具有空间方向性的频带,如图 3 所示。一个典型的 3 层小波分解中各层子图象的空间位置安排如图 4 所示。

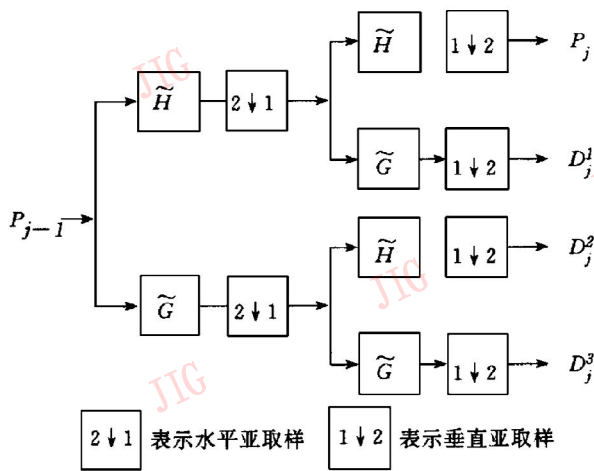


图 2 二维小波变换
Fig. 2 Two—dimension wavelet transform

D_j^3	D_j^1	D_j^3
D_j^2	P_j	D_j^2
D_j^3	D_j^1	D_j^3

图 3 频域中的小波分解

Fig. 3 The wavelet decomposition in frequency domain

P_3	D_3^1	D_2^1	D_1^1
D_3^2	D_3^3		
D_2^2		D_2^3	
D_1^2		D_1^3	

图 4 小波变换后各子图象的空间位置安排

Fig. 4 Disposition of the sub-images after wavelet transform

3 量化噪声分析

在小波图象编码系统中,如果各层子图象 $\{P_j, D_j^1, D_j^2, D_j^3, 1 \leq j \leq J\}$ 运算时不产生误差,那么就可以准确地恢复原始图象。但是为了实现压缩编码,各小波系数必须进行量化,这样,恢复图象与原始图象之间就会产生误差。这里用 $\epsilon_j^1, \epsilon_j^2, \epsilon_j^3, (1 \leq j \leq J)$ 表示量化 D_j^1, D_j^2 和 D_j^3 时的均方误差, ϵ_j 为 $P_j (1 \leq j \leq J)$ 的恢复误差。

为了便于分析小波图象编码系统中量化误差的性质,首先分析一维小波变换的情况,如图 5 所示。设 $\{x_1(n)\}, \{x_2(n)\}$ 分别表示 $\{y(n)\}$ 经小波变换分解后的低频信号和高频信号,由于经过量化处理, $\{y(n)\}$ 恢复时就将产生误差。

若用 $\{e_1(n)\}$ 和 $\{e_2(n)\}$ 分别表示量化 $\{x_1(n)\}$ 和 $\{x_2(n)\}$ 时产生的误差,并为简便起见,假设

$$E[e_1(n)] = E[e_2(n)] = 0 \quad (25)$$

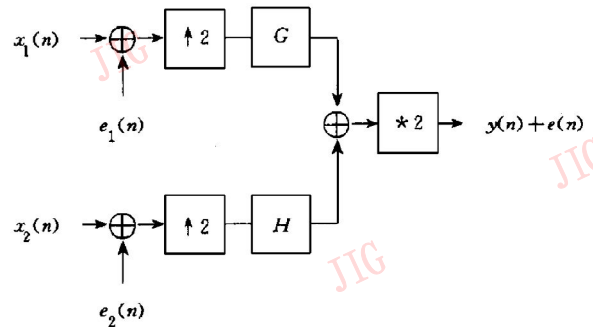


图 5 一维情况下的噪声分析

Fig. 5 Noise analysis of one—dimension wavelet transform

则 $\{x_1(n)\}$ 和 $\{x_2(n)\}$ 的均方误差(MSE)分别为

$$\delta_1^2 = \frac{1}{N} \sum_n E[e_1^2(n)] \text{ 和}$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{N} \sum_n E[e_2^2(n)] \quad (26)$$

恢复信号 $\{y(n)\}$ 及其误差可表示为

$$y(n) + e(n) = 2 \sum_k \{g(n-2k)[x_1(k) + e_1(k)] + h(n-2k)[x_2(k) + e_2(k)]\} \quad (27)$$

因此

$$e(n) = 2 \sum_k \{g(n-2k)e_1(k) + h(n-2k)e_2(k)\} \quad (28)$$

其对应的均方误差 σ_0^2 为

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 = & \frac{1}{2N} \sum_n E[e^2(n)] = \frac{2}{N} \sum_n \{ \\ & \sum_k \sum_l g(n-2k)g(n-2l)E[e_1(k)e_1(l)] + \\ & \sum_k \sum_l h(n-2k)h(n-2l)E[e_2(k)e_2(l)] + \\ & \sum_k \sum_l g(n-2k)h(n-2l)E[e_1(k)e_2(l)] + \\ & \sum_k \sum_l h(n-2k)g(n-2l)E[e_1(l)e_2(k)] \} \end{aligned} \quad (29)$$

根据式(21)~(24)中 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的性质可得到

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (30)$$

上式表示恢复误差的 MSE 是两个量化误差 MSE 的和,这个结论可以扩展到二维情况。由于在二维情况时,通过 P_j, D_j^1, D_j^2 和 D_j^3 恢复得到 P_{j-1} , 于是

$$\epsilon_{j-1} = \epsilon_j + \epsilon_j^1 + \epsilon_j^2 + \epsilon_j^3 \quad 1 \leq j \leq J \quad (31)$$

对式(31)进行递归计算,得

$$\epsilon_{j-1} = \epsilon_j + \sum_{i=j}^J \sum_{k=1}^3 \epsilon_i^k \quad 1 \leq j \leq J \quad (32)$$

上式表明在小波图象编码系统中,对于任何的量化误差,各层恢复误差的 MSE 等于该层塔形之上各层量化误差 MSE 的总和。

4 各层子图象之间码字的分配

为了构造有效的图象编码系统,需要一个合理的码字分配方案,它是在给定的约束条件下,使某一失真函数达到最小值。约束条件经常选择比特率(bit-rate)或熵值(entropy),而失真函数的选择比较困难。简单地讲,失真函数应是系统的恢复失真,因为一个图象编码系统的关键是恢复图象的质量。然而,很难找到恢复失真的明确表达式,对于多层图象编码系统,如子带编码、塔形编码等,则更是如此。很明显,通常用各层子图象的平均失真作为恢复失真的近似而得出的失真函数是不能反映真实情况的。

事实上,对于正交小波图象编码系统,可以根据式(32)导出恢复失真的表达式,并由此而得到满意的码字分配方案。假设给各子图象 $D_j^k (1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq 3)$ 分别分配 R_j^k 比特/像素的码字,给 P_j 分配 R_j 比特/像素的码字,则图象的平均码率 \bar{R} 为

$$\bar{R} = \frac{1}{4^J} R_J + \sum_{j=1}^J \frac{1}{4^j} \sum_{k=1}^3 R_j^k \quad (33)$$

另一方面,根据 Lloyd-Max 量化器的原理, ϵ_j^k, ϵ_j 可表达为

$$\epsilon_j^k = K_j^k 2^{-2R_j^k}; \epsilon_j = K_J 2^{-2R_J} \quad (34)$$

式中 K_j^k 和 K_J 依赖于 D_j^k 和 P_J 及所选择的量化器的类型。将式(33), (34)代入式(32)中,则系统恢复误差的 MSE (ϵ_0) 可以写成

$$\epsilon_0 = K_J 2^{-2R_J} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^3 K_j^k 2^{-2R_j^k} \quad (35)$$

这样,码字的分配方案可如下描述:

在 $\bar{R} = \frac{1}{4^J} R_J + \sum_{j=1}^J \frac{1}{4^j} \sum_{k=1}^3 R_j^k$ 的约束条件下,使

$\epsilon_0 = K_J 2^{-2R_J} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^3 K_j^k 2^{-2R_j^k}$ 达到最小值的 R_j^k 和 R_J 。

这个约束条件式可用拉格朗日乘法处理。设 λ 为拉格朗日乘数,它应满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_J^k} \{ & (K_J 2^{-2R_J} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^3 K_j^k 2^{-2R_j^k}) - \\ & \lambda (\bar{R} - \frac{1}{4^J} R_J - \sum_{j=1}^J \frac{1}{4^j} \sum_{k=1}^3 R_j^k) \} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_j^k} \{ & (K_J 2^{-2R_J} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^3 K_j^k 2^{-2R_j^k}) - \\ & \lambda (\bar{R} - \frac{1}{4^J} R_J - \sum_{j=1}^J \frac{1}{4^j} \sum_{k=1}^3 R_j^k) \} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

经计算得到

$$R_j^k = \bar{R} + j - \frac{4}{3} (1 - \frac{1}{4^j}) + \frac{1}{2} \log_2 \frac{K_j^k}{K} \quad (38)$$

$$R_j = \bar{R} + J - \frac{4}{3} (1 - \frac{1}{4^J}) + \frac{1}{2} \log_2 \frac{K_J}{K} \quad (39)$$

$$\text{其中} \quad K = (K_J)^{4^{-J}} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^3 (K_j^k)^{4^{-j}} \quad (40)$$

5 各层子图象之间量化步长关系

利用前面导出的关系式,在均匀量化时,还可以得出各子图象量化步长之间的关系。

设 Δ_j^k 为 D_j^k 的均匀量化步长, Δ_j 为 P_j 的均匀量化步长,并为简便起见,假设 D_j^k 和 P_j 在 Q_j^k 和 Q_j 范围内均匀分布,于是得到量化误差的 MSE 分别为:

$$\epsilon_j^k = \frac{1}{12} (\Delta_j^k)^2; \epsilon_j = \frac{1}{12} (\Delta_j)^2 \quad (41)$$

由于 $\Delta_j^k = Q_j^k 2^{-R_j^k}$, $\Delta_j = Q_j 2^{-R_j}$ 将它们代入式(41)并与式(34)比较可得

$$K_j^k = \frac{1}{12} (Q_j^k)^2 \quad K_J = \frac{1}{12} (Q_J)^2 \quad (42)$$

则 K 可以如下计算:

$$K = (K_J)^{4^{-J}} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^3 (K_j^k)^{4^{-j}} = \frac{Q^2}{12} \quad (43)$$

其中
$$Q = (Q_J)^{1-J} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^3 (Q_j^k)^{4^{-j}} \quad (44)$$

将式(42), (43)代入式(38)和(39)可得到各层的比特率为:

$$R_j^k = \bar{R} + j - \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{4^j}) + \log_2 \frac{Q_j^k}{Q} \quad (45)$$

$$R_J = \bar{R} + J - \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{4^J}) + \log_2 \frac{Q_J}{Q} \quad (46)$$

对应的量化步长为

$$\Delta_j^k = \frac{Q_j^k}{2^{R_j^k}} = \frac{\Delta}{2^j} \quad (47)$$

$$\Delta_J = \frac{\Delta}{2^J} \quad (48)$$

其中
$$\Delta = \frac{Q}{2^{R - \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{4^J})}} \quad (49)$$

由此可见,相邻层之间的量化步长有成倍的关系,这与多分辨率各层子图象之间的大小具有成倍关系相一致。

6 模拟实验结果

为了验证基于小波变换的图象编码系统中码字分配方案的合理性和有效性,进行了模拟实验,并对解码图象作了客观评价。本实验选用 3 个序列各 50 帧图象作为信源,包括 Renata 序列(意大利广播公司 RAI 研究中心提供),SKI 序列(德国 HHI 提供)和 FlowerGarden 序列(MPEG 测试图象)。客观测试是利用恢复图象和原始图象的峰-峰信噪比来衡量图象的好坏,图 6 分别为 3 个序列图象的信噪比曲线(亮度信号)。由图可见,在压缩比约为 50~60 倍的情况下,信噪比都在 28dB 以上。

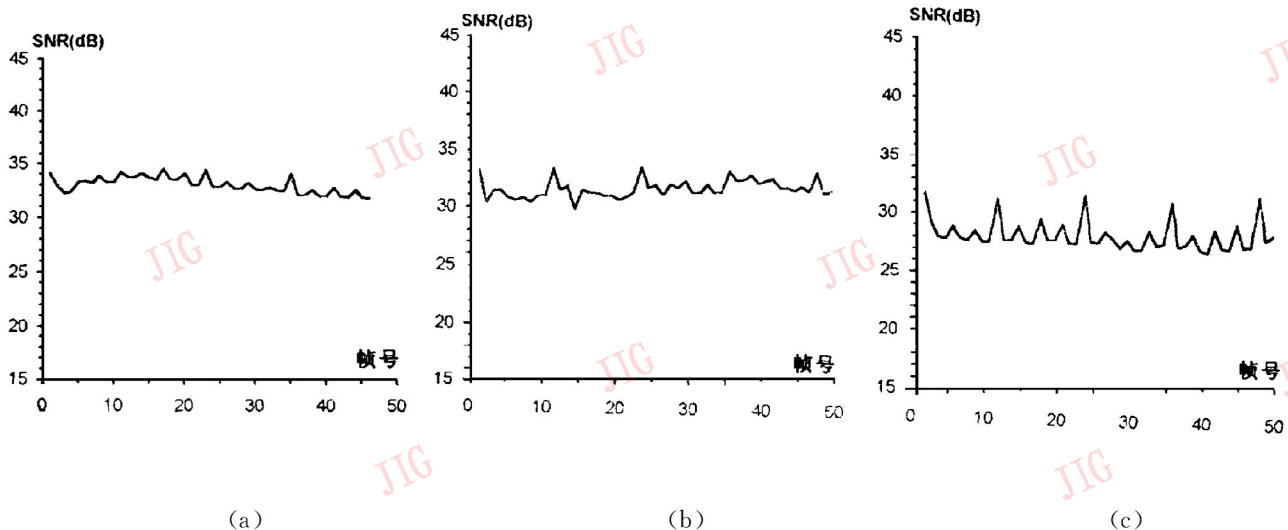


图 6 Renata 序列(a)、SKI 序列(b)、Flower-Garden 序列(c)的信噪比曲线
Fig. 6 Luminance SNR for "Renata" (a), "SKI" (b), "Flower-Garden" (c) sequence

7 结束语

归纳起来,本文的主要研究成果有二。其一,分析了小波变换后各子图象的量化噪声和恢复噪声之间的关系,导出了精确的表达式,指出系统的恢复误差的 MSE 是各层子图象量化误差的 MSE 的总和,并根据这个表达式,建立了约束方程,提出了在给定的比特率下,使系统恢复失真达到最小的优化比特分配方案。其二,在均匀量化下,导出了各层子图象的量化步长之间具有成倍的关系,这为确定量化步长提供了理论依据。根据上述结论建立的实验系统,

给出了满意的序列图象压缩编码效果。

参考文献

- 1 Burt P, Adelson E. The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code. IEEE Trans. on Com. ,1983,31(4):523~540.
- 2 Daubechies I. Orthobnromal Bases of Compactly Supported Wavelets. Communicati on on Pure and Applied Mathematics, 1988,41:909~996.
- 3 Westerink H. et al. Scalar Quantization Error Analysis for Image Subband Coding Using QMF's. IEEE Trans. on Signal Processing,1992,40(2):421~428.
- 4 Cheng K. et al. Subband Image Coding with Biorthogonal Wavelets. IEICE Trans. Fundamentals, 1992, E75A (7): 871 ~ 881.



李涛,1990 年和 1993 年在天津大学计算机科学与工程系分别获软件专业学士学位和计算机组织与体系结构专业硕士学位,1996 年获天津大学电子工程系信号下理专业博士学位,现任职于中国航天部 8375 研究所,主要从事图象处理,图象编码和小波变换等方面的研究。

Noises Analysis and Optimal Bit Allocation in Image Coding Based on Wavelet Transform

Li Tao, Yu Sile

(The 8357 Research Institute of the China Space Industry Corporation, Tianjin 300141)

(Institute of Television and Image Information, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract A study of Image Coding based on Wavelet Transform is made in this paper. On the basis of a systematic analysis of the quantization noises and the reconstruction noises of the sub-images, an optimal bit allocation scheme is presented, which minimizes the system reconstruction distortion at a given bit-rate. When uniform quantizers are used, it is shown that the quantization step of a succeeding level in the wavelet pyramid is a half of that of its predecessor level. The simulation experiments demonstrate the conclusion of this paper and give satisfactory results.

Keywords Wavelet transform, Noises analysis, Optimal bit allocation